

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τμήμα Μαθηματικών

Μάθημα: Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Ημερομηνία Προόδου: 21/5/2015

Θέμα 1

Δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(t) = \cos t - t - 2 + \int_0^t (s-t)y(s)ds, t > 0.$$

Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση αυτή με χρήση των μετασχηματισμών *Laplace*.

Θέμα 2

A) Δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)y(s)ds, t \in [a, b]$$

όπου g συνεχής στο $[a, b]$ και K συνεχής στο $[a, b] \times [a, b]$. Έχοντας δεδομένο ότι η ολοκληρωτική εξίσωση αυτή έχει μια λύση, να δείξετε ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.

B) Να δείξετε ότι $\mathcal{L}\{f(t-3)H(t-3)\} = e^{-3s}F(s)$, όπου F είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* της συνάρτησης f και H η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος *Heaviside*.

Θέμα 3

Να αναγάγετε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\sin t = \frac{1}{2} \int_0^t e^{(t-s)}y(s)ds, t \in [0, 1]$$

σε μια ολοκληρωτική εξίσωση *Volterra* β' είδους και στη συνέχεια να επιλύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση που προέκυψε με τη μέθοδο επαναληπτικών πυρήνων.

Θέμα 4

A) Δίνεται ο τελεστής L , ο οποίος δρα σε συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους έως και 2ης τάξης στο διάστημα $I=[0, \alpha]$,

$$Ly(t) = (t^2 + 1)y''(t) + 3ty'(t) + 3y(t).$$

Να εξετάσετε αν είναι αυτοσυζυγής. Εάν δεν είναι, βρείτε μια κατάλληλη συνάρτηση $k(t)$ ώστε ο τελεστής $\bar{L} = kL$ να είναι αυτοσυζυγής.

B) Να βρείτε τη συνάρτηση *Green* για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y''(t) = 0, -1 < t < 1$$

$$y(-1) = 0, y(1) = 0.$$